Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 78

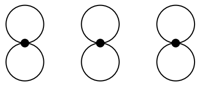
Autor del curso: Javier García

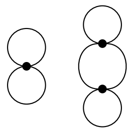
Problemas resueltos por: Roger Balsach

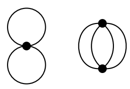
8 de agosto de 2022

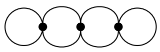
1. Calcular todos los diagramas de vacío a orden 3.

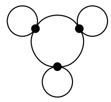
Los diagramas de orden λ^3 son los siguientes:

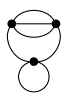

$= \frac{-\lambda^3}{3072}$

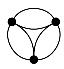

$= \frac{-\lambda^3}{128}$


$= \frac{-\lambda^3}{384}$

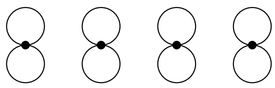

$= \frac{-\lambda^3}{32}$

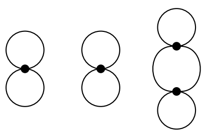

$= \frac{-\lambda^3}{48}$

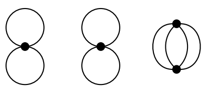

$= \frac{-\lambda^3}{24}$

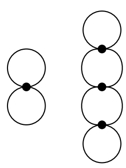

$= \frac{-\lambda^3}{48}$

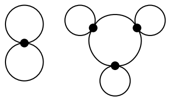
Como bonus, podemos calcular también los diagramas a orden λ^4:


$= \frac{\lambda^4}{98304}$

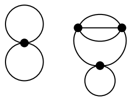

$= \frac{\lambda^4}{2048}$


$= \frac{\lambda^4}{6144}$

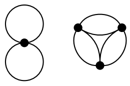

$= \frac{\lambda^4}{256}$



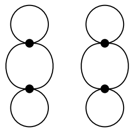
$= \frac{\lambda^4}{384}$



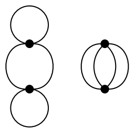
$= \frac{\lambda^4}{192}$



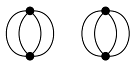
$= \frac{\lambda^4}{384}$



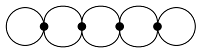
$= \frac{\lambda^4}{512}$



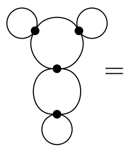
$= \frac{\lambda^4}{768}$



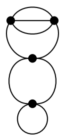
$= \frac{\lambda^4}{4608}$



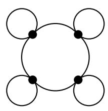
$= \frac{\lambda^4}{64}$



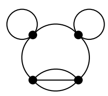
$= \frac{\lambda^4}{32}$



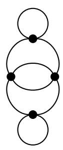
$= \frac{\lambda^4}{48}$



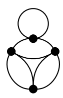
$= \frac{\lambda^4}{128}$



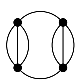
$= \frac{\lambda^4}{48}$



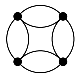
$= \frac{\lambda^4}{32}$



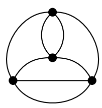
$= \frac{\lambda^4}{16}$



$= \frac{\lambda^4}{144}$

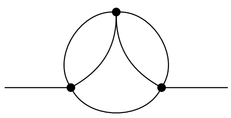


$= \frac{\lambda^4}{128}$

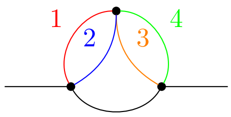


$= \frac{\lambda^4}{32}$

2. Calcular el factor de simetría del diagrama

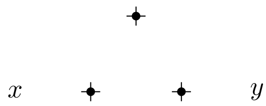


La forma más fácil de determinar el factor de simetría de este diagrama es fijarnos en cuantas formas distintas tenemos de intercambiar propagadores sin que el cambio afecte al diagrama. Para verlo más claro vamos a colorear los cuatro propagadores importantes:

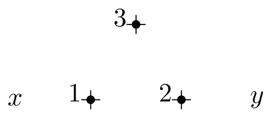


Los propagadores 1 y 2 son idénticos y, por lo tanto, hay 2 opciones (dejarlo como está e intercambiar 1 y 2), por otra parte, lo mismo ocurre con los propagadores 3 y 4. En total hay un total de 4 posibilidades.

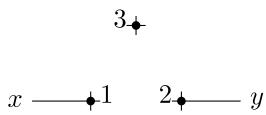
Otra forma de verlo es calcular cuantas formas distintas tenemos de construir el diagrama, esto se puede hacer como hace Javier en los vídeos contando todas las posibles contracciones de los campos, pero también se puede hacer de forma más visual. De forma general queremos construir un diagrama con dos patas externas (que llamaré x e y) y tres vértices, cada uno del tipo $\lambda\phi^4$, lo que nos dice que cada vértice debe tener exactamente 4 conexiones. Representemos esto de la siguiente forma:



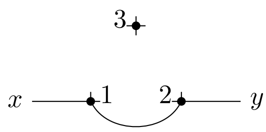
Si queremos reconstruir nuestro diagrama original, primero tenemos que conectar las líneas externas con los vértices, debido a que hay 3 vértices, hay 3 opciones para conectar x, nombremos el vértice elegido como vértice 1. Una vez elegido x nos quedan solo 2 opciones para conectar y (solo nos interesan los diagramas con x e y conectados en vértices distintos), vamos a llamar ese vértice "2", en total hay $3 \cdot 2 = 6$ formas de escoger los vértices. Y, por lo tanto, el vértice 3 será el que no conecte con x ni y:



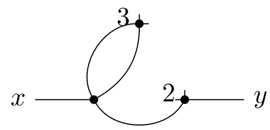
Como hemos dicho tenemos que conectar x con el vértice 1, el vértice tiene aún 4 "conexiones" libres, por lo que hay 4 posibilidades para conectar x. Exactamente lo mismo sucede con y y el vértice 2. Por lo que hay un total de 4^2 posibilidades de conectar x e y, junto con lo anterior tenemos un total de $2 \cdot 3 \cdot 4^2$ formas de obtener el siguiente diagrama:



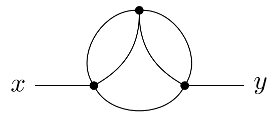
Para obtener el diagrama original necesitamos un propagador entre los vértices 1 y 2, dicho propagador tiene 3 opciones para conectar con el vértice 1 y 3 opciones para conectar con el vértice 2, en total tenemos 3^2 posibilidades de conectar los vértices 1 y 2. Lo que nos deja $2 \cdot 3^3 \cdot 4^2$ formas de obtener el diagrama



Ahora debemos añadir dos propagadores conectando el vértice 1 con el vértice 3, debido a que el vértice 1 solo le quedan 2 conexiones, solo tenemos una única opción para elegir, pero como el vértice 3 tiene aún 4 conexiones disponibles tenemos un total de $4 \cdot 3$ opciones de conectar los dos propagadores desde 1 hasta 3. En total, $2 \cdot 3^4 \cdot 4^3$ formas de obtener el diagrama



Finalmente, nos queda solo unir los vértices 2 y 3 con dos propagadores, hay solo 2 formas de hacerlo, por lo que en total, existen $2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^3 = 20736$ formas de obtener el diagrama que nos interesa.



El factor de simetría es simplemente

$$\frac{3! \cdot (4!)^3}{20736} = \frac{4^3 \cdot 3^4 \cdot 2^4}{4^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2} = 2^2 = 4$$